Como g es derivable en x, es continua allí (véase el teorema 2.2A), y de este modo $\Delta x \to 0$ fuerza a $\Delta u \to 0$. De aquí que,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esta demostración es muy directa, pero desafortunadamente contiene un error sutil. Existen funciones $u = g(x)$ con la propiedad de que $\Delta u = 0$ para algunos puntos en toda vecindad de x (la función constante $g(x) = k$ es un buen ejemplo). Esto significa que la división entre Δu en nuestro primer paso podría no ser legal. No hay una forma sencilla de dar la vuelta a esta dificultad, aunque la regla de la cadena es válida, incluso en este caso. Damos una demostración completa de la regla de la cadena en el apéndice (véase la sección A.2, teorema B). ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(u)$, donde $u = g(t)$, entonces $D_t y = D_u y \cdot$ ______. En notación de funciones, $(f \circ g)'(t) =$ ______ ______.

2. Si $w = G(v)$, donde $v = H(s)$, entonces $D_s w =$ ______ $D_s v$. En notación de funciones $(G \circ H)'(s) =$ ______ ______.

3. $D_x \cos[(f(x))^2] = -\mathrm{sen}($______$) \cdot D_x($______$)$.

4. Si $y = (2x+1)^3 \,\mathrm{sen}(x^2)$, entonces $D_x y = (2x+1)^3 \cdot$ ______ $+ \,\mathrm{sen}(x^2) \cdot$ ______.

Conjunto de problemas 2.5

En los problemas del 1 al 20 encuentre $D_x y$.

1. $y = (1+x)^{15}$
2. $y = (7+x)^5$
3. $y = (3-2x)^5$
4. $y = (4+2x^2)^7$
5. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$
6. $y = (x^2 - x + 1)^{-7}$
7. $y = \dfrac{1}{(x+3)^5}$
8. $y = \dfrac{1}{(3x^2 + x - 3)^9}$
9. $y = \mathrm{sen}(x^2 + x)$
10. $y = \cos(3x^2 - 2x)$
11. $y = \cos^3 x$
12. $y = \mathrm{sen}^4(3x^2)$
13. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$
14. $y = \left(\dfrac{x-2}{x-\pi}\right)^{-3}$
15. $y = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$
16. $y = \cos^3\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$
17. $y = (3x-2)^2(3-x^2)^2$
18. $y = (2-3x^2)^4(x^7+3)^3$
19. $y = \dfrac{(x+1)^2}{3x-4}$
20. $y = \dfrac{2x-3}{(x^2+4)^2}$

En los problemas del 21 al 28 encuentre la derivada que se indica.

21. y' donde $y = (x^2+4)^2$
22. y' donde $y = (x + \mathrm{sen}\, x)^2$
23. $D_t\left(\dfrac{3t-2}{t+5}\right)^3$
24. $D_s\left(\dfrac{s^2-9}{s+4}\right)$
25. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{(3t-2)^3}{t+5}\right)$
26. $\dfrac{d}{d\theta}(\mathrm{sen}^3\,\theta)$
27. $\dfrac{dy}{dx}$, donde $y = \left(\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos 2x}\right)^3$
28. $\dfrac{dy}{dt}$, donde $y = [\mathrm{sen}\, t \tan(t^2+1)]$

En los problemas del 29 al 32 evalúe la derivada que se indica.

29. $f'(3)$, si $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)^3$
30. $G'(1)$ si $G(t) = (t^2+9)^3(t^2-2)^4$
C **31.** $F'(1)$ si $F(t) = \mathrm{sen}(t^2 + 3t + 1)$
32. $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ si $g(s) = \cos \pi s \,\mathrm{sen}^2\, \pi s$

En los problemas del 33 al 40 aplique la regla de la cadena más de una vez para encontrar la derivada que se indica.

33. $D_x[\mathrm{sen}^4(x^2+3x)]$
34. $D_t[\cos^5(4t-19)]$
35. $D_t[\mathrm{sen}^3(\cos t)]$
36. $D_u\left[\cos^4\left(\dfrac{u+1}{u-1}\right)\right]$
37. $D_\theta[\cos^4(\mathrm{sen}\,\theta^2)]$
38. $D_x[x\,\mathrm{sen}^2(2x)]$
39. $\dfrac{d}{dx}\{\mathrm{sen}[\cos(\mathrm{sen}\, 2x)]\}$
40. $\dfrac{d}{dt}\{\cos^2[\cos(\cos t)]\}$

En los problemas 41 al 46 utilice las figuras 2 y 3 para aproximar las expresiones que se indican.

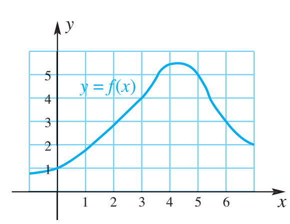

Figura 2

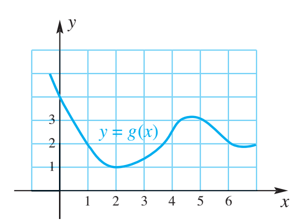

Figura 3

41. $(f+g)'(4)$
42. $(f-2g)'(2)$
43. $(fg)'(2)$
44. $(f/g)'(2)$
45. $(f \circ g)'(6)$
46. $(g \circ f)'(3)$

En los problemas del 47 al 58 exprese la derivada que se indica en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable.

47. $D_x(F(2x))$
48. $D_x(F(x^2+1))$